Πιθανότητες 22/10

## Εμπειρικός Ορισμός Πιθανότητας

(Fisher - 1900)

| | $N$ | $n(K)$ | $n(K)/N$ |
|---|---|---|---|
| Buffon | 4040 | 2048 | 0,5080 |
| Pearson | 12000 | 6019 | 0,5016 |
| -//- | 24000 | 12012 | 0,5005 |

$N$: πόσες φορές ρίχτηκε το νόμισμα
$n(K)$: πόσες φορές βγήκε κορώνα

### ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν μια διαδικασία επαναληφθεί κάτω από τις ίδιες συνθήκες $N$ φορές και στην ακολουθία των $N$ επαναλήψεων $n(E)$ φορές εμφανιστεί το ενδεχόμενο $E$ τότε η πιθανότητα πραγματοποίησης του $E$ ως εξής:

$$P(E) = \lim_{N\to\infty} \frac{n(E)}{N}$$

$\frac{n(E)}{N}$ ← σχετική συχνότητα του $E$

## Ιδιότητες Εμπειρικής Πιθανότητας

1) $0 \leq P(E) \leq 1$

2) $P(S) = \lim_{N\to\infty} \frac{n(S)}{N} = 1$

3) Αν $A, B$ ασυμβίβαστα $A\cap B = \emptyset$ τότε $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$

$\boxed{\text{Απόδειξη}}$

$$P(A\cup B) = \lim_{N\to\infty} \frac{n(A\cup B)}{N} \overset{A\cap B=\emptyset}{=\!=} \lim_{N\to\infty} \frac{n(A)+n(B)}{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{n(A)}{N} + \lim_{N\to\infty} \frac{n(B)}{N}$$

$$= P(A) + P(B)$$

# Αξιωματικός Ορισμός Πιθανότητας

Kolmogorov ~ 1933

Στοιχεία στα οποία βασίζεται

1) ένα μη κενό σύνολο $S \neq \emptyset$

2) έστω $\mathcal{A}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του $S$ τέτοια ώστε

α. $S \in \mathcal{A}$

β. Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $A^c \in \mathcal{A}$

γ. Αν $A_i$ $i=1,2,\dots$ μια ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$ τότε

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A \in \mathcal{A}$$

~~Α...~~

Η οικογένεια υποσυνόλων $\mathcal{A}$ του $S$ που ικανοποιεί τα $\alpha, \beta, \gamma$ λέγεται σ-άλγεβρα ή σ-πεδίο (σ-field)

## ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $S \neq \emptyset$ και $\mathcal{A}$ η σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $S$. Θεωρούμε τη συνολοσυνάρτηση $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$. Η $P$ λέγεται πιθανότητα ή μέτρο πιθανότητας αν ικανοποιεί τα αξιώματα:

A1) $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$

A2) $P(S) = 1$

A3) Αν $A_i \in \mathcal{A}$ $i=1,2,\dots$ με $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ $i,j=1,2,\dots$ $i \neq j$ τότε

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Τα $A_1, A_2, A_3$ λέγονται αξιώματα του Kolmogorov

Η τριάδα $(S, \mathcal{A}, P)$ ⟵ χώρος πιθανότητας.

**ΠΡΟΤΑΣΗ** (Ιδιότητες της Πιθανότητας)

Έστω χώρος πιθανοτήτων $(S, \mathcal{A}, P)$. Ισχύουν:

1) $P(\emptyset) = \emptyset$

2) Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε α. $P(A^c) = 1 - P(A)$
β. $0 \leq P(A) \leq 1$

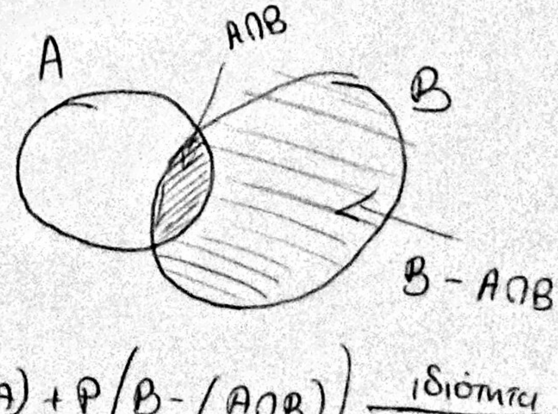
3) Αν $A, B \in \mathcal{A}$ με $A \subseteq B$ τότε α. $P(A) \leq P(B)$
β. $P(B-A) = P(B) - P(A)$

4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

5) α Αν $A_k \in \mathcal{A}$ $k = 1, 2, \ldots$ μια αύξουσα ακολουθία $(A_k \subseteq A_{k+1})$
Τότε $P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$

β. Αν $A_k \in \mathcal{A}$ $k = 1, 2, \ldots$ μια φθίνουσα ακολουθία $(A_{k+1} \subseteq A_k, \forall k)$
Τότε $P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$

$\boxed{\text{Απόδειξη ④}}$




$A \cup B = A \cup [B - (A \cap B)]$

Επίσης $A \cap [B - (A \cap B)] = \emptyset$

$$P(A \cup B) = P\{A \cup [B - (A \cap B)]\} \overset{A3}{=} P(A) + P(B - (A \cap B)) \xrightarrow[A \cap B \subseteq B]{\text{ιδιότητα 3}}$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

## Παρατήρηση

Για τρία ενδεχόμενα $A, B, \Gamma$ η (4) γίνεται

$$P(A\cup B\cup \Gamma) = P(A)+P(B)+P(\Gamma)-P(A\cap B)-P(A\cap \Gamma)-P(B\cap \Gamma)+P(A\cap B\cap \Gamma)$$

## Παράδειγμα

Έστω $(S, \mathcal{A}, P)$ χ.π και $A, B \in \mathcal{A}$ με $P(A)=0{,}4$ και $P(B)=0{,}7$

α) Είναι τα $A, B$ ασυμβίβαστα? $(A\cap B=\emptyset)$

β) Ν.δ.ο $0 \le P(A\cap B) \le 0{,}4$

## Λύση

α. Έστω ότι $A, B$ ασυμβίβαστα δηλ $A\cap B=\emptyset$

Άρα από ιδιότητα 1 $P(A\cap B)=0$. Από ιδιότητα 4

$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) = 0{,}4+0{,}7-0 \Rightarrow P(A\cup B)=1{,}1$

Άτοπο διότι από την ιδιότητα 2β $P(A\cup B)\le 1$

β. Ισχύει $A\cap B \subseteq A$ Από ιδιότητα 3 $P(A\cap B)\le P(A)\le 0{,}4$

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) \\ P(A\cup B)\le 1 \end{array}\right\} \Rightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)\le 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 0{,}4+0{,}7-P(A\cap B)\le 1 \Rightarrow P(A\cap B)\ge 0{,}1$

ΠΡΟΤΑΣΗ (Ανισότητα Boole)

Έστω $(S, \mathcal{A}, P)$ χ.π και $A_n \in \mathcal{A}$ $n=1,2,\dots$

Τότε $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

Παράδειγμα

Για $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ νδο :

$$\max\left\{0, \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - n + 1\right\} \leq P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \leq \min\{P(A_1), \dots, P(A_n)\}$$

Λύση

- Ισχύει $A_1 \cap \dots \cap A_n \subseteq A_i \quad \forall i = 1, 2, \dots n$

  Από την ιδιότητα (3) $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \leq P(A_i) \quad \forall i = 1, \dots n$

  Άρα $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \leq \min\{P(A_1), \dots, P(A_n)\}$

-

Νόμοι De Morgan

$\rightarrow \left(\bigcup_i A_i\right)^c = \bigcap_i A_i^c$

$\rightarrow \left(\bigcap_i A_i\right)^c = \bigcup_i A_i^c$

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \overset{\text{ιδιοτ.(2)}}{=} 1 - P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c\right) \overset{\text{de Morgan}}{=}$$

$$= 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right) \underset{\text{Ανισ. Boole}}{\geq} 1 - \sum_{i=1}^{n} \left(P(A_i)^c\right) \overset{\text{ιδιοτ (2)}}{=}$$

$$= 1 - \sum_{i=1}^{n} [1 - P(A_i)] = 1 - \sum_{i=1}^{n} 1 + \sum_{i=1}^{n} P(A_i) =$$

$$= 1 - n + \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \quad (1)$$

Επίσης από το αξίωμα ($A_1$) $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \geq 0$ ②

Από ①, ② $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \geq \max\left\{0, \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - n + 1\right\}$

## Δεσμευμένη Πιθανότητα

Ζάρι ρίχνεται μια φορά. $S = \{1, 2, \dots, 6\}$

$A = \{\text{αποτέλεσμα} \geq 4\} = \{4, 5, 6\}$

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

Μερική πληροφορία $\rightarrow$ Αποτέλεσμα άρτιος $\rightarrow B = \{2, 4, 6\}$

Ερώτηση: Αφού έλαβα την μερική πληροφορία B η πιθανότητα του A είναι $\frac{3}{6}$ ή αλλάζει? Και αν αλλάζει πόση είναι τώρα?

Η νέα πιθανότητα του A μετά την μερική πληροφορία B είναι $\frac{2}{3}$ διότι $S' = \{2, 4, 6\}$.

Η νέα πιθανότητα του A που λαμβάνει υπόψη της τη μερική πληροφορία B την ονομάζουμε Δεσμευμένη πιθανότητα του A, δοθέντος ότι έχει πραγματοποιηθεί το B και την συμβολίζουμε με $P(A \mid B)$

$\uparrow$ δεδομένου

Από το παράδειγμα παρατηρώ:

$$\rightarrow P(A \mid B) = \frac{\|A \cap B\|}{\|B\|} = \frac{\frac{\|A \cap B\|}{\|S\|}}{\frac{\|B\|}{\|S\|}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $(S, \mathcal{A}, P)$ χώρος πιθανότητας και $A, B \in \mathcal{A}$ με $P(B)>0$

Η δεσμευμένη πιθανότητα του A δοθέντος του B συμβολίζεται με $P(A|B)$ και ορίζεται $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$